

1. Ableitung

Wichtige Reihen

Natürliche Zahlen (kleiner Gauss)	Quadratische Zahlen (grosser Gauss)
$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Kubische Zahlen	Geometrische Reihe
$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$
Additivitätsregel	Arithmetische Reihe
$\sum_{i=0}^n S_i \pm T_i = \sum_{i=0}^n S_i \pm \sum_{i=0}^n T_i$	$\sum_{i=0}^n (id + a_0) = a_0(n+1) + d \frac{n(n+1)}{2}$
Konstante Funktionen	$\sum_{i=0}^n ciT_i = c \sum_{i=0}^n T_i$

Wichtige Funktionswerte

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4} -\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3} -\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2} -\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\frac{3*\pi}{2} -\frac{3*\pi}{2}$	$\pm 2\pi$	$\frac{2\pi}{3} -\frac{2\pi}{3}$
sin	0	$\frac{1}{2} -\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} -\frac{\sqrt{3}}{2}$	1 -1	0	-1 1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} -\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} -\frac{\sqrt{3}}{3}$	1 -1	$\sqrt{3}$	nicht definiert	0	nicht definiert	0	$-\sqrt{3} \sqrt{3}$

Funkt	gerade	ungerade	periodisch	umkehrbar	Monoton steigend	Monoton fallend
exp				x	x	
ln				x	x	
sin		x	x			
cos	x		x			
tan		x	x			
arcsin		x		x	x	
arccos				x		x
arctan		x		x	x	
abs	x					
sig		x				
id		x		x	x	
chs		x		x		x
sqr	x					
sqrt				x	x	
rez		x		x		

Ableitungsfunktion

Funktion	Ableitungsfunktion	Funktion	Ableitungsfunktion
f'	$x \text{ a } f'(x)$	f'	$x \text{ a } f'(x)$
$id := x \text{ a } x$	$x \text{ a } 1$	sin	cos
$sqr := x \text{ a } x^2$	$x \text{ a } 2x$	cos	$-\sin$
$rez := x \text{ a } \frac{1}{x}$	$x \text{ a } -\frac{1}{x^2}$	tan	$1 + \tan^2$
$sqrt := x \text{ a } \sqrt{x}$	$x \text{ a } \frac{1}{2\sqrt{x}}$	arcsin	$x \text{ a } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$exp := x \text{ a } e^x$	$exp := x \text{ a } e^x$	arccos	$x \text{ a } -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
ln	$rez := x \text{ a } \frac{1}{x}$	arctan	$x \text{ a } \frac{1}{1+x^2}$

Ableitungsregeln

Linearitätsregel	9	Verkettungsregel	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Bernoulli-l'Hôpital	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$		

2. Integral

Integralregeln

Vorzeichenregel	$\int_a^b f = -\int_b^a f$	Linearitätsregel	$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
Additivitätsregel	$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$	Produktregel	$\int_a^b c f = c \int_a^b f$
Hauptsatz	$x \rightarrow \left(\int_a^x f\right)' = f$	Bestimmtes Integral	$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) i \Delta x\right)$
			$(n = \text{Teilintervalle}, \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i \Delta x)$
Unbestimmte Integral	$I(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \frac{d}{dx} I = I'(x) = f(x)$ Die Differenz zweier unbestimmter Integrale von $f(x)$ ist eine Konstante. $\int f(x) dx = F(x) + C$ Man beachte: Ein bestimmtes Integral ist eine Zahl (Flächeninhalt A), ein unbestimmtes Integral dagegen eine Funktion der oberen Grenze x (Flächenfunktion I(x))!		

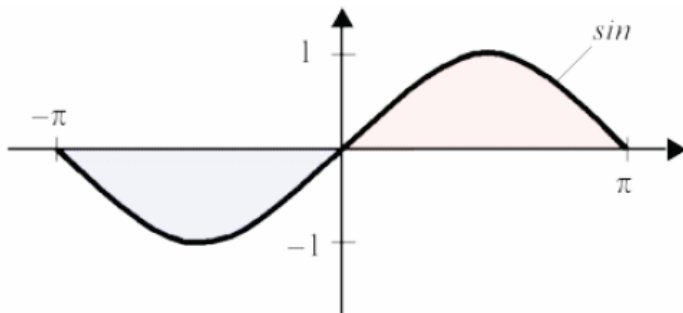
Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a) \quad \text{wobei } (F'(x) = f(x))$$

Schreibweise von Integralen

$$\int_a^b x \rightarrow \frac{x}{x^2+1} \equiv \int_a^b \frac{x}{x^2+1} dx \quad \int_1^5 id \equiv \int_1^5 x dx \quad \int_{-1}^3 \ln(x) dy \equiv 4 * \ln(x) \quad \int_a^b x dx \equiv -\int_b^a x dx$$

Graphische Interpretation von Integralen



$$\int_a^b x dx$$

$$a < b$$

Flächen, **positive** Ordinate = **positiv**

Flächen, **negative** Ordinate = **negativ**

$$a > b$$

Flächen, **negative** Ordinate = **positiv**

Flächen, **positive** Ordinate = **negativ**

Einfache bestimmte Integrale

Integral	Wert	Integral	Wert
$\int_a^b x dx$	$\frac{b^2 - a^2}{2}$	$\int_a^b x^3 dx$	$\frac{b^4 - a^4}{4}$
$\int_a^b c dx$	$ci(b-a)$	$\int_a^b \sqrt{x} dx$	$\frac{2ib^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2ia^{\frac{3}{2}}}{3}$
$\int_a^b e^x dx$	$e^b - e^a$	$\int_a^b \ln(x) dx$	$\int_a^b \ln(x) dx$
$\int_a^b \tan(x) dx$	$\int_a^b \tan(x) dx$	$\int_a^b \arctan(x) dx$	$\frac{\ln(a^2+1)}{2} - \frac{\ln(b^2+1)}{2} - a \arctan(a) + b \arctan(b)$
$\int_a^b \sin(x) dx$	$\cos(a) - \cos(b)$	$\int_a^b \arcsin(x) dx$	$\sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2} - a \arcsin(a) + b \arcsin(b)$
$\int_a^b \cos(x) dx$	$\sin(b) - \sin(a)$	$\int_a^b \arccos(x) dx$	$b \arccos(b) - a \arccos(a) + \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}$

2.1. Unbestimmtes Integral (jedes Ist eine Stammfunktion zu $f(x)$)

Einfache unbestimmte Integrale

Integral	Wert	Integral	Wert
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \sqrt{x} dx$	$\frac{2ix^{\frac{3}{2}}}{3} + C \quad (n \neq -1)$
$\int e^x dx$	$e^x + C$	$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln(x) + c$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int \ln(x) dx$	$x \ln(x) - x + C$
$\int \sin(x) dx$	$-\cos(x) + C$	$\int \arcsin(x) dx$	$\sqrt{1-x^2} + x \arcsin(x)$
$\int \cos(x) dx$	$\sin(x) + C$	$\int \arccos(x) dx$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\int \tan(x) dx$	$-\ln(\cos(x)) + C$	$\int \arctan(x) dx$	$x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$	$\tan(x) + C$		

Bestimmung von Stammfunktionen

Im Gegensatz zur Ableitungsfunktion ist die explizite Berechnung einer Stammfunktion bei vielen Funktionen sehr schwierig oder nicht möglich.

Partielle Integration	
$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big _a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$	
$\int_a^b x \ln(x) dx = \frac{b^2}{2} \ln(b) - \frac{a^2}{2} \ln(a) - \int_a^b \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{b^2}{2} \left(\ln(b) - \frac{1}{2} \right) - \frac{a^2}{2} \left(\ln(a) - \frac{1}{2} \right)$	
$\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \quad F' = f$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C$
$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$	

2.2. Numerische Berechnung von Integralen

Oft ist es schwierig oder nicht möglich, eine Stammfunktion anzugeben. Allerdings reicht es in vielen Fällen auch aus, die Fläche näherungsweise zu berechnen. Die Verfahren der numerischen Berechnungen bauen auf einer Approximation der Funktion durch einfacher integrierbare Funktionen auf.

Rechteckregel	$\int_a^b f \approx \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i)$
Trapezregel	$\int_a^b f(x) dx = \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \cdot \Delta x \equiv \left(\frac{1}{2} (y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \cdot \Delta x$ <pre>float((1/2 + sum(sin(i*PI/n)/(i*PI/n), i=1..n-1))*(PI/n))</pre>
Simpsonsregel (Argumente von y_n sind die Koordinaten der Teilintervalle) (ξ kann als x betrachtet werden!)	Fassregel $\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$ //gilt nur für $n=2$ sonst die exaktere Exakter (mehrere Doppelintervalle) $\int_a^b f(x) dx \approx (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \dots + y_n) \frac{\Delta x}{3} = S_n$ $= \left(y_0 + y_n + 4 \sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} \right) \frac{\Delta x}{3}$ Fehlerformel mit n Teilintervallen $\left(\int_a^b f \right) - S_n = \frac{b-a}{180} \Delta x^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \quad \text{wobei } \xi = x$

2.3. Anwendungen

Schwerpunkt Koordinaten(x_s, y_s)	$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b f^2(x) dx \quad \text{mit} \quad A := x \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ <p>Wenn der Schwerpunkt auf der Ordinatenachse ist, dann wäre es y_s und wenn der Schwerpunkt auf der Abszissenachse wäre, dann x_s</p>
Momente	<p>Moment bezüglich der Abszissenachse $\hat{=} M_{y_s} = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) - c \int_a^b f(x)$</p> <p>Moment bezüglich der Ordinatenachse $\hat{=} M_{x_s} = \int_a^b x if(x) - d \int_a^b f(x)$</p>
Fläche zwischen Funktionsgraphen	$\int_a^b f(x) - g(x) dx$ $F = F_1 + F_2 = \int_{x_1}^{x_2} f_2 - f_1 + \int_{x_2}^{x_3} f_1 - f_2 $ <p>hier in diesem Bsp. ist zuerst f_2 oberhalb f_1 und dann kreuzen sich die Graphen und f_1 ist oberhalb von f_2</p>
Bogenlänge	$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

3. Fourierreihen

System (wir betrachten lineare Systeme)

Ein System S heisst linear, wenn folgende **zwei** Bedingungen erfüllt sind:

1. $S(x_1 + x_2) = S(x_1) + S(x_2)$
2. $S(c \cdot x) = c \cdot S(x)$

3.1. Fourierreihe in Sinus-Kosinus-Form

Stetiges Signal s mit der Grundperiode T (**Periodendauer**)

$$f(n) := t \rightarrow a_0 + 2 \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} s(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

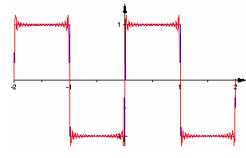
ungerade Signale $a_k = 0$, gerade Signale $b_k = 0$

für $k \in \{1..n\}$ seine Fourierreihe der Ordnung n .

ω_1 heisst die Grundkreisfrequenz, a_0 die Konstante, a_k und b_k die Koeffizienten

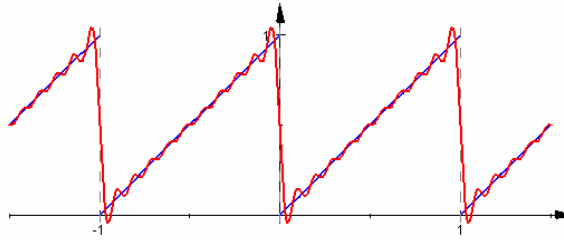
Fourierreihe der Rechteckfunktion mit Mupad

```
n := 40;
a := array(1..n);
b := array(1..n);
for k from 1 to n do
a[k] := int(sign(t)*cos(k*PI*t), t=-1..1)/int(cos(k*PI*t)^2, t=-1..1);
b[k] := int(sign(t)*sin(k*PI*t), t=-1..1)/int(sin(k*PI*t)^2, t=-1..1);
end_for;
a; b;
fn := t -> _plus(b[k]*sin(k*PI*t) $ k=1..n);
s := t -> piecewise([t>=-1 and t<=1, sign(t)], [t<-1, s(t+2)], [t>1, s(t-2)]);
PlotGraph([s, fn], -2..2)
```



Sägezahnsignal

```
n := 10;
a := array(0..n): b := array(1..n):
a[0] := 0.5;
w1 := 2*PI;
for k from 1 to n do
a[k] := int(t*cos(k*w1*t), t=0..1):
b[k] := int(t*sin(k*w1*t), t=0..1):
print(Typeset, [k, a[k], b[k]]);
end_for;
s := t -> t-floor(t); //floor è Abrundungsfunktion
f := t -> a[0]+2*_plus(b[k]*sin(k*w1*t) $ k=1..n);
PlotGraph([s, f], -1.5..1.5);
```



3.2. Fourierreihe in Amplituden-Phasen-Form

Die Fourierreihe kann auch in dieser Form geschrieben werden, wobei:

$A_0 = a_0$ | A_k der Radius | φ_k Richtungswinkel

$$f := A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

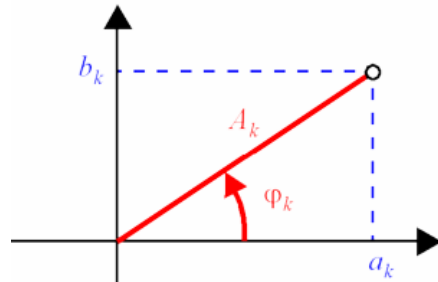
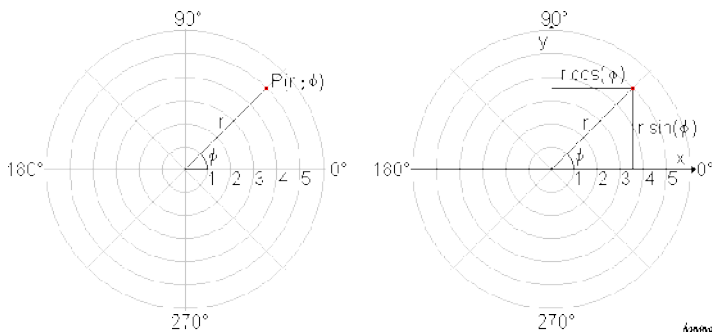
Phasenverschobene Sinus- oder Kosinusfunktionen lassen sich als Linearkombinationen einer nichtverschobenen Sinusfunktion und einer nichtverschobenen Kosinusfunktion derselben Frequenz schreiben.

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \sin(y) \cos(x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(y) \cos(x) \mp \sin(y) \sin(x)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$



Die Polarkoordinaten (Kreiskoordinaten) eines Punktes in der euklidischen Ebene werden in Bezug zu einem Koordinatenursprung (einem Punkt der Ebene) und einer Polarkoordinatenrichtung angegeben.

$$\begin{aligned} (\sin \alpha) &= \text{Gegenkathete} / \text{Hypotenuse} \\ (\cos \alpha) &= \text{Ankathete} / \text{Hypotenuse} \\ (\tan \alpha) &= \text{Gegenkathete} / \text{Ankathete} \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \end{aligned}$$

Wenn der Punkt in der rechten Halbebene liegt:

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

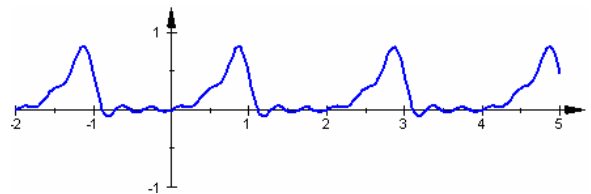
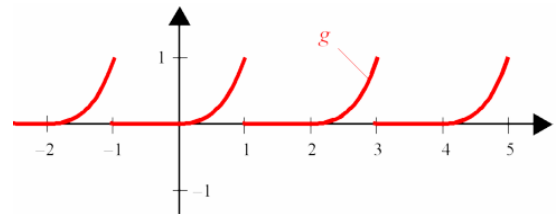
Wenn der Punkt in der linken Halbebene liegt:

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi$$

Im Ursprung ist kein Richtungswinkel definiert

Fourierentwicklung der Rechteckfunktion mit Mupad

```
n := 5: //5-fache Grundkreisfrequenz
a := array(0..n): b := array(1..n):
A := array(0..n): phi := array(1..n):
w1 := PI:
a[0] := 1/6: A[0] := a[0]:
for k from 1 to n do
a[k] := simplify(1/2*int(t^2*cos(k*PI*t),t=0..1));
b[k] := simplify(1/2*int(t^2*sin(k*PI*t),t=0..1));
A[k] := simplify(sqrt(a[k]^2+b[k]^2));
phi[k] := simplify(arg(a[k],b[k])); //arg = arctan(b[k]/a[k])
end_for;
sk := a[0]+2*_plus(a[k]*cos(k*w1*t)+b[k]*sin(k*w1*t) $ k=1..n);
ap := A[0]+2*_plus(A[k]*cos(k*w1*t-phi[k]) $ k=1..n);
PlotGraph(sk,-10..10,-1..1);
PlotGraph(ap,-10..10,-1..1);
```



Die Sinus- und Kosinusform und die Amplituden-Phasenform haben die gleichen Graphen

3.3. Eigenschaften von Fourierreihen

Linearität der Fourierkoeffizienten

s_1 und s_2 seien zwei Signale mit derselben Periode und damit derselben Grundkreisfrequenz ω_1
 $s_1 + s_2$, $a_0 = a_{1,0} + a_{2,0}$, $a_k = a_{1,k} + a_{2,k}$, $b_k = b_{1,k} + b_{2,k}$, $c \cdot s$, $c \cdot a_0$, $c \cdot a_k$, $c \cdot b_k$

Zeitskalierung

Ausgangs-Fourierreihe $f_1 := t \rightarrow a_0 + 2 \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$

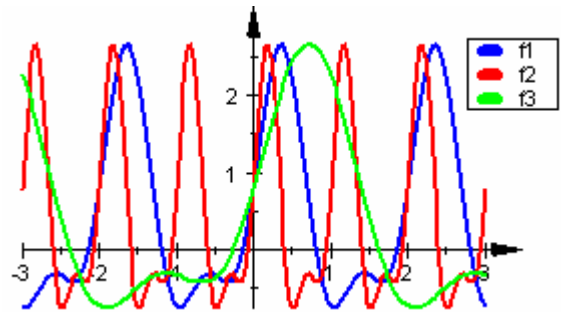
Dann hat das Signal $s_2 := t \rightarrow s(c \cdot t)$ die Fourierreihe $f_2 := t \rightarrow a_0 + 2 \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega_2 t) + b_k \sin(k\omega_2 t)]$

wobei $\omega_2 = c \cdot \omega_1$

$$f_1 := A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \quad \text{è} \quad f_2 := A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_2 t - \varphi_k)$$

Auswirkung von Frequenzänderungen

```
w1 := PI;
f1 := t -> 1/2+3/2*cos(w1*t-PI/3)
      +2/3*cos(2*w1*t+5*PI/4);
w2 := 2*w1;
f2 := t -> 1/2+3/2*cos(w2*t-PI/3)
      +2/3*cos(2*w2*t+5*PI/4);
w3 := w1/2;
f3 := t -> 1/2+3/2*cos(w3*t-PI/3)
      +2/3*cos(2*w3*t+5*PI/4);
PlotGraph([f1,f2,f3],-3..3);
```



Spiegelung Abszissenachse

$$\omega_1, a_0, a_k, b_k \rightarrow \overset{\circ}{\omega}_1 = \omega_1, \overset{\circ}{a}_0 = -a_0, \overset{\circ}{a}_k = -a_k, \overset{\circ}{b}_k = -b_k$$

$$A_0, A_k, \varphi_k \rightarrow \overset{\circ}{A}_0 = A_0, \overset{\circ}{A}_k = A_k, \overset{\circ}{\varphi}_k = \varphi_k \pm \pi$$

Spiegelung Ordinatenachse

$$\omega_1, a_0, a_k, b_k \rightarrow \overset{\circ}{\omega}_1 = \omega_1, \overset{\circ}{a}_0 = a_0, \overset{\circ}{a}_k = a_k, \overset{\circ}{b}_k = -b_k$$

$$A_0, A_k, \varphi_k \rightarrow \overset{\circ}{A}_0 = A_0, \overset{\circ}{A}_k = A_k, \overset{\circ}{\varphi}_k = -\varphi_k$$

Zeitverschiebung

Stetiges Signal s mit der Grundperiode T (**Periodendauer**)

$$f(n) := t \rightarrow a_0 + 2 \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

Dann hat das Signal

$$r := t \rightarrow s(t - \tau)$$

$$\overset{\circ}{f}(n) := t \rightarrow \overset{\circ}{a}_0 + 2 \sum_{k=1}^n [\overset{\circ}{a}_k \cos(k\omega_1 t) + \overset{\circ}{b}_k \sin(k\omega_1 t)]$$

$$\overset{\circ}{a}_0 = a_0, \quad \overset{\circ}{a}_k = a_k \cos(k \cdot \gamma) - b_k \sin(k \cdot \gamma), \quad \overset{\circ}{b}_k = a_k \sin(k \cdot \gamma) + b_k \cos(k \cdot \gamma), \quad \gamma = \omega_1 \cdot \tau = 2 \cdot \pi \frac{\tau}{T}$$

Wenn ein Signal zeitlich um eine halbe Periode verschoben wird, so wechseln die ungerade nummerierten Koeffizienten das Vorzeichen, während die gerade nummerierten unverändert bleiben.

4. Differenzialgleichung:

- Eine Gleichung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen heisst Differentialgleichung.
- Die höchste vorkommende Ableitung heisst die Ordnung der Differentialgleichung.
- Eine Differentialgleichung hat **in der Regel unendlich viele Lösungen**. Die Lösungsmenge nennt man die allgemeine Lösung und eine einzelne Lösung eine spezielle Lösung.
- Zusätzliche Bedingungen, welche dazu dienen, aus der allgemeinen Lösung eine spezielle auszuwählen, heissen Randbedingungen oder Anfangsbedingungen (wenn das Argument die Zeit darstellt). Eine Differentialgleichung mit Randbedingungen wird auch als Randwertproblem oder Anfangswertproblem bezeichnet.
- Angewandte Probleme, bei denen eine ganze Funktion gesucht ist, führen auf Differenzialgleichungen.

Explizite Differenzialgleichung

Eine Differentialgleichung, in der die höchste Ableitung isoliert auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht, heisst **explizit**.

1. Ordnung:

$$f'(x) = F(x, f(x)) = F(x, y)$$

n-ter Ordnung:

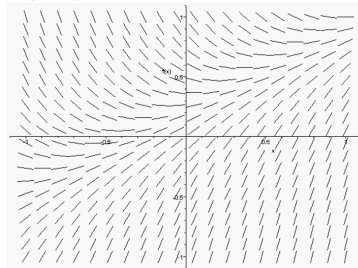
$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$$

Richtungsfeld

$$f'(x) = 2x - 3f(x) + 1$$

Mit Koordinaten von Punkten kann man die Steigung in diesem Punkt ausrechnen.

$$P(1,2) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 = -3$$



è unendlich viele Lösungen

Gegeben sei eine Differentialgleichung 1. Ordnung, welche explizit gemacht werden kann.

$f'(x) = F(x, f(x))$ Ihr Richtungsfeld wird wie folgt konstruiert:

Man wählt ein rechteckiges Gitter von geeigneter Ausdehnung und Maschenweite und trägt in jedem Maschenknoten mit den Koordinaten (x, y) ein kleines Geradestück mit der Steigung $s_{(x,y)} = F(x, y)$ ein.

Richtungsfeld

```
richtfeld := proc(rs, xbereich, ybereich, mw)
local nx, ny, feld;
begin
nx := floor((op(xbereich,2)-op(xbereich,1))/mw)+1;
ny := floor((op(ybereich,2)-op(ybereich,1))/mw)+1;
feld := plot::VectorField2d([1,rs],
x=xbereich, y=ybereich, Mesh = [nx,ny]);
plot(feld, GridVisible=TRUE);
end_proc
```

Methode von Euler

Gegeben ist eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung $f'(x) = F(x, f(x)) = F(x_n, y_n)$ und ein Punkt $P_n = (x_n, y_n)$ des Graphen. Der Punkt $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ wird wie folgt bestimmt:

Man wählt ein Δx mit kleinem Betrag und berechnet

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad y_{n+1} = y_n + s_n \Delta x \quad \text{mit} \quad s_n = F(x_n, y_n) = f'(x)$$

Merke: Wenn man z.B. x_1 und y_1 berechnet hat, muss man diese Punkte nochmals bei s_1 einsetzen und dann noch x_2 und y_2 berechnet werden.

Verfahren von Runge-Kutta

Gegeben sei eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $f'(x) = G(x, f(x))$ und ein Punkt $P_n = (x_n, y_n)$ des Graphen einer speziellen Lösung. Der Punkt $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ wird wie folgt bestimmt:

Man wählt ein Δx mit kleinem Betrag. Die Abszissen von P_{n+1} ist $x_{n+1} = x_n + \Delta x$

Die Ordinate ist $y_{n+1} = y_n + s_n \Delta x$ mit $s = \frac{s_1 + 2 \cdot s_2 + 2 \cdot s_3 + s_4}{6}$ wobei

$$s_1 = F(x_n, y_n)$$

$$s_2 = F\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + s_1 \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$s_3 = F\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + s_2 \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$s_4 = F(x_n + \Delta x, y_n + s_3 \cdot \Delta x)$$

Approximation nach Euler

```
x := array(0..20):
y := array(0..20):
x[0] := -1.0: y[0] := 1.0:
dx := 0.1:
for n from 0 to 19 do
  s := -x[n]/y[n]:
  x[n+1] := x[n]+dx:
  y[n+1] := y[n]+s*dx:
  print([x[n+1],y[n+1]])
end_for
```

```
F := (x,y) -> -x/y:
x1 := array(0..20):
y1 := array(0..20):
x1[0] := -1.0: y1[0] := 1.0:
dx := 0.1:
for n from 0 to 19 do
  s := F(x1[n],y1[n]):
  x1[n+1] := x1[n]+dx:
  y1[n+1] := y1[n]+s*dx:
end_for
```

Approximation nach Runge-Kutta

```
F := (x,y) -> -x/y:
x2 := array(0..10):
y2 := array(0..10):
x2[0] := -1.0: y2[0] := 1.0:
dx := 0.2:
for n from 0 to 9 do
  s1 := F(x2[n],y2[n]):
  s2 := F(x2[n]+dx/2,y2[n]+s1*dx/2):
  s3 := F(x2[n]+dx/2,y2[n]+s2*dx/2):
  s4 := F(x2[n]+dx,y2[n]+s3*dx):
  s := (s1+2*s2+2*s3+s4)/6.0:
  x2[n+1] := x2[n]+dx:
  y2[n+1] := y2[n]+s*dx:
end_for
```

```
x := array(0..10): y := ar-
ray(0..10):
x[0] := -1.0: y[0] := 0.0:
dx := 0.2:
for n from 0 to 4 do
  s1 := x[n]-y[n]:
  s2 := x[n]+dx/2-(y[n]+s1*dx/2):
  s3 := x[n]+dx/2-(y[n]+s2*dx/2):
  s4 := x[n]+dx-(y[n]+s3*dx):
  s := (s1+2*s2+2*s3+s4)/6.0:
  x[n+1] := x[n]+dx:
  y[n+1] := y[n]+s*dx:
end_for
```

Lösen von Differenzialgleichungen mit MuPAD

```
MyDgl := ode(f'(x)=2*x-3*f(x),f(x))
solve(MyDgl)
MySpezDgl := ode({f'(x)=2*x-3*f(x),f(0)=0},f(x))
solve(MySpezDgl)
AuftragDgl := ode({f(x)*f'(x)+x = 0,f(-1)=1},f(x))
solve(AuftragDgl)
```

Separierbare Differenzialgleichung

separierbar, wenn die Dgl. auf die Form $f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$ (explizit) gebracht werden kann, wobei g und h gegebene Funktionen sind.

Trick

Substitution: $f(x) = y$ $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ è $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(f(x))}$
 è $\int h(y) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$
 è $H(y) + c1 = G(x) + c2$

Rücksubstituiert è $H(f(x)) = G(x) + (c2 - c1)$

Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

wenn $a_0 \cdot f + a_1 \cdot f' + a_2 \cdot f'' + \dots + a_n \cdot f^{(n)} = s$

oder $\sum_{k=0}^n a_k \cdot f^{(k)} = s$

a_k = Koeffizienten

s = Störfunktion

Wenn die Störfunktion die Nullfunktion ist, heisst die Differenzialgleichung **homogen** ($g^{(4)} - g = 0$), andernfalls **inhomogen** ($2f'' + 5f' - 3f = \sin$).

Vorgehen: Zuerst explizit machen, dann erraten.

a. $f' - f = 0$	è $f' = f$	è $f := x \quad a \quad A \cdot e^x$
b. $f' - 4f = 0$	è $f' = 4f$	è $f := x \quad a \quad A \cdot e^{4x}$
c. $f'' + f = 0$	è $f'' = -f$	è $f := x \quad a \quad A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)$
d. $f'' + 4f = 0$	è $f'' = -4f$	è $f := x \quad a \quad A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)$

Linearität der Lösungen homogener linearer Differenzialgleichungen

1. Wenn f_1 und f_2 Lösungen einer homogenen linearen Dgl sind, so ist auch ihre Summe $f_1 + f_2$ eine Lösung.
2. Ist ferner f eine Lösung und c eine Konstante, so ist auch das Produkt $c \cdot f$ ein Lösung.

Zusammengefasst:

Wenn f_1 und f_2 Lösungen einer homogenen linearen Dgl sind, so ist auch jede Linearkombination $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2$ eine Lösung.

$$2f(x) + 3f'(x) = 0$$

Ansatz:

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot e^{s \cdot x}$$

$$\hat{=} f' := x \cdot a \cdot s \cdot e^{s \cdot x}$$

einsetzen in Dgl.

$$\hat{=} 2 \cdot e^{s \cdot x} + 3 \cdot s \cdot e^{s \cdot x} = 0 \quad \Rightarrow s = -2/3$$

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot A \cdot e^{-2/3 \cdot x}$$

$$f''(x) + f'(x) - 6f(x) = 0$$

Ansatz:

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot e^{s \cdot x}$$

$$\hat{=} f' := x \cdot a \cdot s \cdot e^{s \cdot x}$$

$$f''(x) = s^2 e^{s \cdot x}$$

einsetzen in Dgl.

$$\hat{=} s^2 + s - 6 = 0 \quad \Rightarrow s = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot A \cdot e^{2 \cdot x} + B \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Wenn mal die Gleichung für s nicht erfüllbar wäre, so bedeutet das nicht, dass die Dgl keine Lösung hat, sondern bloss, dass sie keine solche von der Form $f := x \cdot a \cdot e^{s \cdot x}$ hat.

Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung 2. Ordnung

Geg: $c_1 \cdot f''(x) + c_2 \cdot f'(x) = 0$

charakteristische Gleichung:

$$c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = 0$$

$$s = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4 \cdot c_2 c_0}}{2 \cdot c_2} \quad \text{oder} \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Drei Fälle zu unterscheiden:

1. wenn für s zwei Lösungen:

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot A \cdot e^{s_1 x} + B \cdot e^{s_2 x}$$

2. wenn nur eine Lösung für s

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot (A \cdot x + B) e^{s_1 x}$$

3. wenn keine Lösung für s

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot A \cdot e^{r x} \cos(\omega x - \varphi)$$

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot (A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x)) \cdot e^{r x}$$

$$\text{mit} \quad r = \frac{-c_1}{2 \cdot c_2} \quad \omega = \sqrt{\frac{c_0}{c_2} - r^2}$$

$$\text{oder} \quad s = r \pm \omega \cdot \sqrt{-1}$$

$$f''(x) + 4 \cdot f'(x) + 7 \cdot f(x) = 0$$

$$\hat{=} s^2 + 4 \cdot s + 7 = 0$$

$$\hat{=} s = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 28}}{2} = -2 \pm \frac{\sqrt{-12}}{2} = -2 \pm \sqrt{-3}$$

$$\hat{=} \sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

$$\hat{=} s = -2 \pm \sqrt{3} \sqrt{-1} \quad \dots$$

$$f^{(4)} = 4f$$

$$\hat{=} f^{(4)} - 4f = 0$$

$$\hat{=} s^4 - 4 = 0$$

$$(s - \sqrt{2})(s + \sqrt{2})(s^2 + 2) = 0$$

$$s = \sqrt{2}$$

$$s = -\sqrt{2}$$

$$s = \pm \sqrt{-2} = \pm \sqrt{2} \sqrt{-1}$$

$$\hat{=} f := x \cdot a \cdot A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x) + C e^{\sqrt{2}x} + D e^{-\sqrt{2}x}$$

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Dgl für f

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x) = s(x)$$

ist die Summe einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x) = 0$$

$$2 \cdot f'(x) - 3 \cdot f(x) = 4 \cdot x - 1$$

$$\text{è } f_1 := x \quad a \quad ax + b$$

$$\text{è } f_1' := x \quad a \quad a$$

partikuläre Lösung f_1 :

$$\text{è } 2a - 3(ax + b) = 4x - 1$$

$$\text{è } a = \dots, b = \dots$$

charakteristische Gleichung f_h :

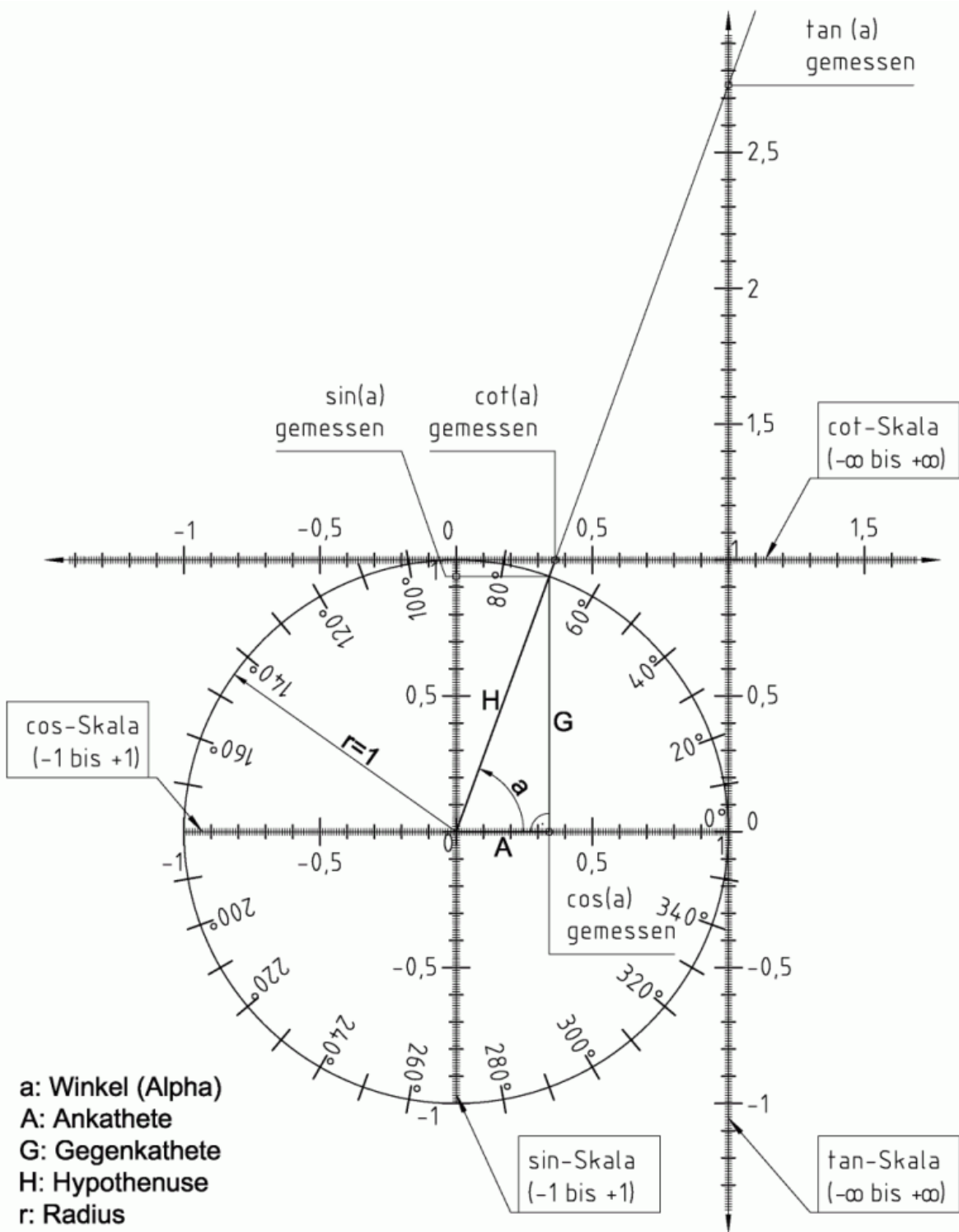
$$\text{è } 2 \cdot f'(x) - 3 \cdot f(x) = 0$$

$$\text{è } s = \dots$$

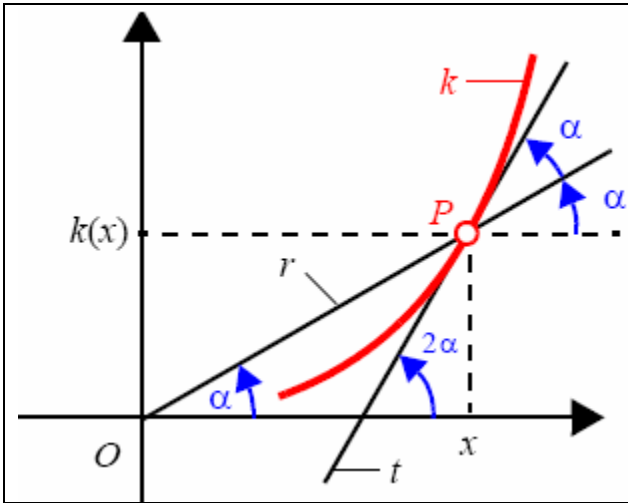
$$\text{è } f = f_1 + f_h := x \quad a \quad -\frac{4}{3}x - \frac{5}{9} + A \cdot e^{\frac{3}{2}x}$$

5. Nice to know

	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	<p>Mupad Befehl für die sign Funktion mit piecewise $s := t \rightarrow \text{piecewise}([t \geq -1 \text{ and } t \leq 1, \text{sign}(t)], [t < -1, s(t+2)], [t > 1, s(t-2)])$</p>
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$		$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$		
$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$		$\sin(4x) = 8 \sin x \cos^3 x - 4 \sin x \cos x$
$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$		$\cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$
$\cos(5x) = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$		$\tan(4x) = \frac{4 \tan x - 4 \tan^3 x}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x}$
$\tan(3x) = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$		$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$		$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$		$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$
$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$		$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$
$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$		$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$
$9^3 = (3^2)^3 = 3^6$		



- a: Winkel (Alpha)
- A: Ankathete
- G: Gegenkathete
- H: Hypotenuse
- r: Radius
- $\sin(a)$: Sinus (Alpha)
- $\cos(a)$: Cosinus (Alpha)
- $\tan(a)$: Tangens (Alpha)
- $\cot(a)$: Cotangens (Alpha)



$$\frac{k(x)}{x} = \tan(\alpha)$$

$$k'(x) = \tan(2\alpha)$$